

Def: Si dice conica in $AG_2(\mathbb{R})$ una curva algebrica reale (piana) del II ordine.

• curva algebrica $\exists f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ tale che $f(x,y)$ non costante.
 $C = V(f)$

• reale: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\rightarrow \tilde{V}(F) = \overline{V}(F)$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ $F(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 f(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$.
il polinomio $f(x,y)$ ha coeff. in $\mathbb{R}$.

• piano: la curva è contenuta in un piano $AG_2(\mathbb{R})$.

• II ordine $\rightarrow \deg f(x,y) = 2$
 $\rightarrow$ ogni retta di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ interseca $\tilde{C}$ in 2 punti ove $\tilde{C} = \tilde{V}_C(F)$.

$$f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \quad \deg f(x, y) = 2$$

$$I_n \mathbb{R}: 2 \neq 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

$$(1) \quad F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + a_{33}x_3^2$$

Oss: In $F(x_1, x_2, x_3)$ compaiono 6 coeff. a_{ij} $\rightarrow \infty^6$ eq.

$\downarrow$ a meno di coeff. di proporzionalità ci sono ∞^5 coniche.

EQ. PROPORZIONALI
DANNO LA MEDESIMA
CONICA.

| Per 5 punti in posizione generale passa una ed una sola conica. |

Dobbiamo DETERMINARE 5 parametri "lineari"

→ ci servono 5 equazioni indipendenti

→ otteniamo le 5 eq. facendo passare la curva per

5 punti in posizione generale.



$$K \begin{bmatrix} x_1(p_1)^2 & 2x_1(p_1)x_2(p_1) & 2x_1(p_1)x_3(p_1) & x_2(p_1)^2 & 2x_2(p_1)x_3(p_1) & x_3(p_1)^2 \\ \vdots & & & & & \\ x_1(p_5)^2 & \dots & & & & \end{bmatrix}$$

= 5

I punti risultano a 3 a 3 non allineati.

oss: Una conica corrisponde all'insieme dei punti singolari per una forma quadratica.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrice della conica

e di eq. (1)

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow F(x_1, x_2, x_3) = {}^t X A X$$

se chiamo $\varphi(X, Y)$ la forma bilineare

$$\varphi(X, Y) = {}^t X A Y$$

allora

- 1) $\varphi(X, Y)$ è simmetrica perché $A = A^T$
- 2) $F(X) = 0 \Leftrightarrow \varphi(X, X) = 0$
cioè x è vettore nullo se x
è vettore singolare per la
forma quadratica indotta da φ .

Def: Sia $P = [X']$ un punto di $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ tale che
 $X' \notin \text{Ker}(A)$ cioè $AX' \neq 0$.

Si dice polare di P la retta di $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$
associata ad $(X')^{\perp \varphi}$ cioè

$$r := \{[X] \in \mathbb{P}^2 \mathbb{R} : {}^T X A X' = 0\} = P^{\perp \varphi}$$

oss: r è una retta perché $AX' \neq 0$

il punto P è detto polo di r_0 .

OSS importante: Supponiamo $\det A \neq 0 \Rightarrow$

$$P^{\perp q \perp q} = P$$

In particolare se r_0 è una qualsiasi retta di $\mathbb{P}^2 \cap R \Rightarrow r_0^{\perp q}$ è uno sp. vett. di dim = 1 e

dunque un punto.

POLARITÀ: L_q SCAMBIA punti $\leftrightarrow$ rette
di $\mathbb{P}^2 \cap R$ di $\mathbb{P}^2 \cap R$.

DATA r_0 retta si dice polo di r_0 il punto $r_0^{\perp q}$.

Quando $P \in P^{\perp q}$? cioè quando un punto appartiene alla sua retta polare?

$$P \in P^{\perp q} \Leftrightarrow P = [X] \text{ e}$$

$$X \in X^{\perp q} \Leftrightarrow {}^t X A X = 0$$

$$\Leftrightarrow F(X) = 0 \Leftrightarrow P \in C.$$

I punti che appartengono alla propria polare sono tutti e soli i punti della conica. (det $A \neq 0$).

Se P è un punto, i punti di $P^{\perp q}$ (= polare di P) sono detti punti coniugati a P rispetto a C .

Se $P \in P^{\perp q}$ si dice che P è autoconiugato (rispetto a C). $\rightarrow C$ è il luogo dei suoi punti autoconiugati (det $A \neq 0$).

Sia C una curva algebrica di equazione $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Un punto $P = [X']$ è multiplo per $C \iff$

$$\nabla F|_P = 0 \quad \& \quad F(X') = 0$$

$$\text{cioè} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_P = 0 \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_P = 0 \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x_3} \right|_P = 0 \quad F(X') = 0$$

$$\nabla F := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right).$$

ove le derivate parziali sono derivate formali del polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[x_i^{a_i} x_j^{a_j} \right] = a_i x_i^{a_i-1} x_j^{a_j}$$

e poi si procede per linearità.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{n+1}) =$$

ixi

$$= 2 x_i^{a-1} G(x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{n+1})$$

La dimostrazione si basa sul fatto che un polinomio $f(x)$ ha una radice multipla x_0

$$\Leftrightarrow f(x) = (x-x_0)^2 g(x) \quad \text{ma allora}$$

$$f'(x) = 2(x-x_0)g(x) + (x-x_0)^2 g'(x)$$

e quindi x_0 è radice contemporaneamente di $f(x)$ e di $f'(x)$.

Vali però anche il viceversa. In particolare

$f(x)$ has undradice multipla $\Leftrightarrow$

$f(x)$ has undradice in comune con $f'(x)$.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad F(x) = {}^t X A X$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \rightarrow 2AX = \underline{0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0$$

In particolare se $\nabla F(x) = \underline{0} \Rightarrow 2AX = \underline{0} \Rightarrow {}^t X A X = 0$
 $\Rightarrow F(x) = 0$

CONSEGUENZA

$P = [X']$ è doppio per $\mathcal{C}$ conica
di equazione ${}^t X A X = 0$

$\Leftrightarrow X' \in \text{Ker } A.$

oss: Se $\mathcal{C}$ ha un punto doppio $\Rightarrow \mathcal{C}$ è riducibile in quanto
ha grado 2 $\Rightarrow \mathcal{C}$ si spezza in 2 rette.

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE

$\text{rk}(A) = 3$ 1) ~~non nulla~~ $\text{Ker}(A) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{C}$ è una conica
generale.

(privi di punti doppi).

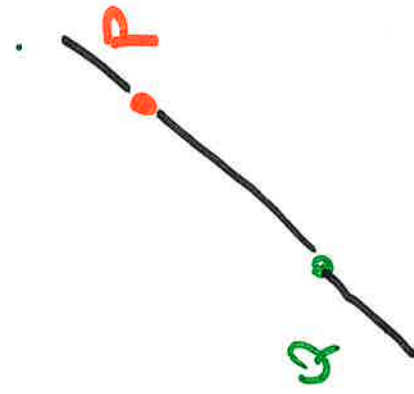
$\text{rk}(A) = 2$ 2) $\dim \text{Ker } A = 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ è una conica singolare (con un
punto doppio) $\Rightarrow \mathcal{C}$ è riducibile

$\text{rk}(A) = 1$ 3) $\dim \text{Ker } A = 2 \Rightarrow \mathcal{C}$ è una conica singolare (con ∞^2
pti doppi) $\Rightarrow \mathcal{C}$ è riducibile.

2) Supponiamo C sia una conica singolare con esattamente 1 punto doppio $\Rightarrow C$ è unione di 2 rette reali e distinte oppure immaginarie e coniugate.

N.B. il punto doppio di C è reale perché A matrice reale e $\ker(A) \leq \mathbb{R}^3$.

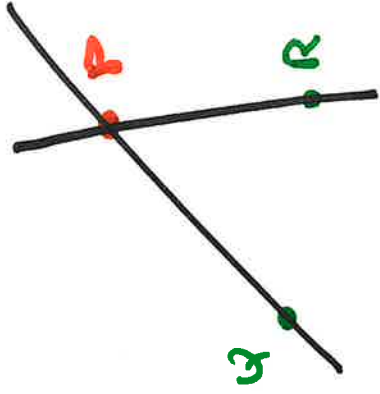
Sia C una conica e P un suo punto doppio $\Rightarrow$ ~~esiste~~ in $\mathbb{P}^2$ esiste almeno un altro punto $Q \in C$.



La retta PQ interseca C almeno 3 volte (2 in P ed 1 in Q) $\Rightarrow$ è contenuta in C .

Se $C = PQ$ come insieme di punti $\Rightarrow C$ è unione delle rette PQ contate 2 volte.

Altrimenti sia $R \in \mathbb{C} \setminus PQ \Rightarrow$ la retta PR deve essere contenuta in $\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$ è unione della retta PQ e della retta PR .



OSSERVIAMO CHE SE Q
 È UN PUNTO REALE
 $\Rightarrow R$ ~~presentandosi~~
 può essere preso
 come punto reale
 anche esso.

In fatti $F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3) \cdot H(x_1, x_2, x_3)$
 con F polinomio reale. e $\deg G = \deg H = 1$

In particolare o $G(x_1, x_2, x_3), H(x_1, x_2, x_3)$ sono entrambi reali oppure $G = \bar{H}$ perché il prodotto deve essere reale. $\Rightarrow PQ$ e PR devono entrambe essere reali.

oppure sono 2 rette immaginarie e coniugate.

Se $\mathcal{C}$ contiene una retta r_0 immaginaria $\Rightarrow \mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \Rightarrow$

$$r_0 \subseteq \mathcal{C} \text{ e } \bar{r}_0 \subseteq \mathcal{C}.$$

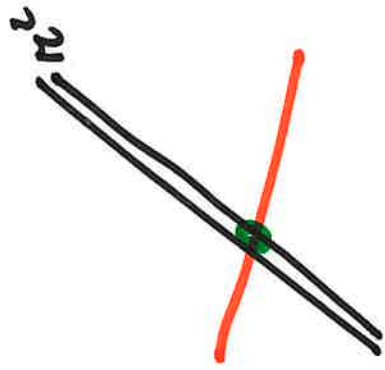
Sia $\mathcal{C}$ una conica singolare $\Rightarrow$
 $\mathcal{C}$ è unione di 2 rette^{2,1} che possono essere

- a) reali e coincidenti
- b) reali e distinte
- c) immaginarie e coniugate.

I punti doppi di $\mathcal{C}$ sono tutti e soli i punti di $\pi \cap \Lambda$.

$$\Rightarrow (a) \Leftrightarrow \pi k(\Lambda) = 1$$

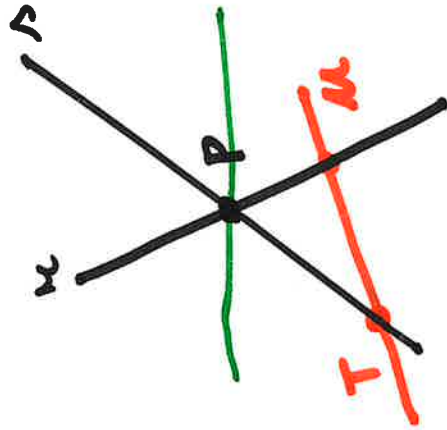
$$(b, c) \Leftrightarrow \pi k(\Lambda) = 2$$



a)

$$\mathcal{C} = \pi^2$$

$\Rightarrow$ ogni retta π^2 di $\mathbb{P}^2$ $\mathcal{C}$ interseca $\mathcal{C} = \pi^2$ in un unico punto $\Rightarrow$ questo punto deve essere doppio $\Rightarrow$ in questo caso ci sono ∞^1 punti doppi.



b, c)

ogni retta per P diversa da π, Δ interseca $\mathcal{C}$ solamente in $P \Rightarrow P$ doppio $\forall T \in \mathcal{C}$ con $T \neq P$ esiste Δ appartenente alla retta di $\mathcal{C}$ non per T e la retta TV interseca $\mathcal{C}$ in 2 punti distinti $\Rightarrow T$ non è doppio.

$\Rightarrow \exists!$ punto doppio $\Rightarrow hK(A) = 2$.

oss: In $\mathbb{P}^2$ abbiamo finito di classificare le coniche.

CLASSIFICARE LE CONICHE IN $\mathbb{P}^2$ è equivalente

a CLASSIFICARE I PRODOTTI SCALARI.



NOI POSSIAMO SEMPRE (scegliendo un opp. riferimento.)

RICORRERE AD UNA MATRICE DEL TIPO

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

In particolare ci sono 3 tipi di coniche

- | | | | |
|--------------------|-------------|-----------------------------|-----------------|
| a) generali: | $(1, 1, 1)$ | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ | $\kappa(A) = 3$ |
| b) degeneri: | $(1, 1, 0)$ | $x_1^2 + x_2^2 = 0$ | $\kappa(A) = 2$ |
| c) dopp. degeneri: | $(1, 0, 0)$ | $x_1^2 = 0$ | $\kappa(A) = 1$ |

In $IP^2 \mathbb{R}$ dobbiamo guardare le regnature.

$\left[\begin{array}{l} (+++) \\ (++)- \\ (- - -) \\ (- - +) \end{array} \right]$ Generali

$\left[\begin{array}{l} (++)0 \\ (+-0) \\ (- - 0) \\ (+00) \\ (-00) \end{array} \right]$ Degeneri



$(+00), (-00) \rightarrow$ retta contacta 2 volte.

$(++0) \rightarrow$ la prod. vedere rispetto la retta $x_3 = 0$

ha seg. $(++) \Rightarrow$ è definito positivo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ NON ci sono punti isotropi $\Rightarrow$ NON ci sono

punti impropri di $\mathbb{C}$ REALI $\Rightarrow$ la conica

si spezza in 2 rette immaginarie e coniugate.

$(+ - 0)$ $\rightarrow$ retta ed $x_3 = 0$ abbiamo
 $x_1^2 - x_2^2 = 0$

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

$$[(1, -1, 0)], [(1, 1, 0)]$$

2 punti impropri reali $\Rightarrow$

la conica si spezza in 2 rette reali e distinte.

Generali $(+++)$ $(---)$ $\Rightarrow$ prod. scalare def. positivo (negativo)
 $\Rightarrow$ conica priva di punti reali.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad x^2 + y^2 = -1$$

$(++-)$, $(-+-)$ $\rightarrow$ conica generale con pt. reali.